



گروه آموزشی : ریاضی

تاریخ : ۱۳۹۳/۸/۲۸

وقت : ۷۵ دقیقه

نام و نام خانوادگی :

شماره دانشجویی :

نام مدرس :

دانشکده ریاضی

امتحان میان ترم درس : ریاضی-۱ فنی (۱۷ گروه هماهنگ)

نیمسال (اول / دوم) ۱۳۹۴ - ۱۳۹۳

توجه :

از نوشتن با مداد خودداری نمایید. استفاده از ماشین حساب مجاز نیست.

در طول امتحان به هیچ سوالی پاسخ داده نمی شود.

(هر سوال ۱۵ نمره دارد.)

سوال ۱ - جوابهای معادله مقابل را به دست آورید :
$$z^3 = \left(\frac{1 + \sqrt{3}i}{1 - \sqrt{3}i} \right)^4$$

سوال ۲ - اگر $f(x) = \begin{cases} 1-2x & x < 1 \\ 1+x & 1 \leq x \end{cases}$ و $g(x) = \begin{cases} 1-x & x < 0 \\ x^2 & 0 \leq x \end{cases}$ آنگاه $f \circ g$ را بیابید.

سوال ۳ - $f\left(\frac{\pi}{4}\right)$ را طوری بیابید که تابع $f(x) = \frac{(1 - \sqrt{\sin x})(1 - \sqrt[3]{\sin x})}{(1 - \sin x)^2}$ در $x = \frac{\pi}{4}$ پیوسته باشد.

سوال ۴ - نمودار تابع $y = \frac{4x}{(x-2)^2}$ را با بیان تمام جزئیات رسم کنید.

موفق باشید

جواب سوال ۱: $z^r = \left(\frac{1+\sqrt{3}i}{1-\sqrt{3}i}\right)^r = \left(\frac{2e^{\frac{\pi}{3}i}}{2e^{-\frac{\pi}{3}i}}\right)^r = \left(e^{\frac{2\pi}{3}i}\right)^r = e^{\frac{2\pi r}{3}i} = e^{\frac{2\pi}{3}i} \rightarrow z = e^{\frac{2\pi}{3}i} \rightarrow z_k = e^{\left(\frac{2k\pi}{3} + \frac{2\pi}{3}\right)i}, k=0,1,2$

جواب سوال ۲: اگر $x < 0$ آنگاه $g(x) = 1-x$ و در نتیجه $g(x) \geq 1$.

اگر $x \geq 0$ آنگاه $g(x) = x^2$. اکنون اگر $0 \leq x < 1$ داریم $g(x) < 1$ و اگر $x \geq 1$ داریم $g(x) \geq 1$

$$f \circ g(x) = \begin{cases} 1-2g(x) & g(x) < 1 \\ 1+g(x) & 1 \leq g(x) \end{cases} \rightarrow f \circ g(x) = \begin{cases} 1-2g(x) & 0 \leq x < 1 \\ 1+g(x) & x < 0, 1 \leq x \end{cases} \rightarrow f \circ g(x) = \begin{cases} 2-x & x < 0 \\ 1-2x^2 & 0 \leq x < 1 \\ 1+x^2 & 1 \leq x \end{cases}$$

جواب سوال ۳: برای اینکه تابع در $x = \frac{\pi}{2}$ پیوسته باشد باید داشته باشیم:

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{(1-\sqrt{\sin x})(1-\sqrt[3]{\sin x})}{(1-\sin x)^2}$$

برای محاسبه این صورت و مخرج آن را عبارتهای مناسب ضرب می‌کنیم.

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{(1-\sqrt{\sin x})(1-\sqrt[3]{\sin x})}{(1-\sin x)^2} \times \frac{(1+\sqrt{\sin x})(1+\sqrt[3]{\sin x}+\sqrt[3]{\sin^2 x})}{(1+\sqrt{\sin x})(1+\sqrt[3]{\sin x}+\sqrt[3]{\sin^2 x})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{(1-\sin x)^2}{(1-\sin x)^2(1+\sqrt{\sin x})(1+\sqrt[3]{\sin x}+\sqrt[3]{\sin^2 x})} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1}{(1+\sqrt{\sin x})(1+\sqrt[3]{\sin x}+\sqrt[3]{\sin^2 x})} = \frac{1}{6}$$

جواب سوال ۴: دامنه تابع $y = \frac{4x}{(x-2)^2}$ عبارت است از $D_f = R - \{2\}$ و $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{4x}{(x-2)^2} = 0$ و $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{4x}{(x-2)^2} = \infty$

بنابر این، نمودار تابع یک مجانب قائم $x=2$ و یک مجانب افقی $y=0$ دارد.

مشتق و ریشه‌های آن را مشخص می‌کنیم.

$$y' = \frac{-4x-8}{(x-2)^3}; y'=0 \rightarrow \begin{cases} -2 \\ -1/2 \end{cases}$$

جدول تغییرات را کامل می‌کنیم.

x	$-\infty$	-2	2	∞
y'		-	+	-
y	0	\searrow	$-1/2$	\nearrow
	∞	\searrow	\nearrow	∞

بنابر این یک نقطه مینیمم موضعی در نقطه $(-2, -1/2)$ دارد.

